07 Les nombres premiers

07-01 Généralités

Définition

Un entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Théorème

Soit un entier naturel $n \geq 2$.

Si n n'est pas premier alors il existe un nombre premier $d \leq \sqrt{n}$ qui divise n.

Exemple

Comme 35 n'est pas premier alors il existe un nombre premier $d \leq \sqrt{35} (\approx 5{,}9)$ qui divise 35.

Remarque

La contraposée de ce théorème est appelée **test de primalité** :

Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ alors n est premier.

Ainsi, pour prouver que 211 est premier, il suffit de tenter de le diviser par : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 et 13.

Propriété

Il existe une infinité de nombre premiers.

Démonstration

Effectuons un raisonnement par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini et se note $P = \{p_1 ; p_2 ; ... ; p_k\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $a = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k + 1$. Comme a n'est pas un élément de P alors il possède au moins un diviseur premier appartenant à P.

Ce nombre divise alors $a_k - p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ donc il divise 1, ce qui est impossible.

L'ensemble des nombres premiers est donc infini.

07-01 Applications du cours

Application 1

Marin Mersenne (1588-1648) était un moine français, mathématicien, physicien et philosophe, ami de René Descartes.

On appelle **nombre de Mersenne** un nombre qui s'écrit sous la forme :

$M_n = 2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul.

Mersenne avait émis la conjecture suivante :

« M_n est premier $\Leftrightarrow$ n est premier »

1. Calculer et tester les onze premiers nombres de Mersenne.

2. **a]** Pour tout entier naturel non nul k, développer le produit suivant :

$(x - 1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1})$

b] Soit n un entier non premier. Il existe deux entiers a et b compris entre 2 et $n - 1$ tels que $n = ab$.
Montrer que M_n est divisible par M_a.

c] Conclure.

Application 2

Un **nombre parfait** est un entier naturel égal à la moitié de la somme de ses diviseurs.

1. Tester si les nombres suivants sont parfaits :

a] 5

b] 6

c] 16

d] 28

2. On pose $P_n = 2^{n-1} M_n$ où M_n est le n-ième nombre de Mersenne.

a] Déterminer si P_3, P_5 et P_7 sont des nombres parfaits.

b] Soit n un entier naturel tel que M_n est premier.
Dresser la liste des diviseurs de $P = 2^{n-1} M_n$ puis calculer leur somme. Qu'en déduit-on ?

Euler (XVIIIe s.) a démontré que tout nombre parfait pair s'écrit sous la forme $2^{n-1}M_n$, avec M_n premier.
On ne sait pas s'il existe des nombres parfaits impairs.